Exercice 16

On considère les points $A(-4;0;2)$, $B(0;3;2)$ et $C(-1;1;0)$. On note θ la mesure de l'angle géométrique asscocié aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1) Démontrer que $cos(\theta) = \frac{3\sqrt{14}}{14}$.
2) En déduire la valeur de θ au dixième de degré près.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos(\theta)$

$\Leftrightarrow \cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot3 + 3\cdot1 + 0\cdot(-2)$

$= 15$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+3^2+0^2}$
$= 5$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}$
$= \sqrt{14}$

D'où : $\cos(\theta) = \dfrac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}\sqrt{14}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}$

2) Donc $\theta \simeq 36{,}7°$

Exercice 17

Pour quelle(s) valeur(s) du nombre k ($k \in \mathbb{R}$) les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{2};k;-k)$ et $\vec{v}(-\sqrt{2};-3;k)$ sont-ils orthogonaux ?

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(-\sqrt{2}) - 3k - k^2 = 0$

$\Leftrightarrow -k^2 - 3k - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 \ (>0)$

deux solution réeles

$$k_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{3-1}{2(-1)} = -2$$

$$k_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{3+1}{2\cdot(-1)} = -1$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $k=1$ ou $k=-2$

Exercice 18

On donne les points $A(0;3;0)$, $B(-1;3;2)$, $C(4;-2;1)$ et $D\left(\frac{2}{5};3;-\frac{4}{5}\right)$.

Le point D est-il le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) ?

D est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\Leftrightarrow$ (CD) et (AB) sont perpendiculaires et $(CD)\cap(AB)=\{D\}$

On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-\frac{18}{5}\\5\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\0\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

$$D\in(AB) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} \mid \overrightarrow{AD} = k\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} \mid \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\0\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{2}{5}$$

Donc : $D\in(AB)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -1\cdot\left(-\frac{18}{5}\right)+0\cdot5+2\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)$$

$$= 0$$

Donc (AB) et (CD) sont orthogonales et $(AB)\cap(CD)=\{D\}$.

Il suit que $(AB)\perp(CD)$ et D est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Exercice 19

Les droites *d* et *d'* sont-elles orthogonales ?

$$d:\begin{cases}x=1-2t\\y=-3+t\\z=2-t\end{cases},t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d':\begin{cases}x=5+s\\y=-3+s\\z=-2-s\end{cases},s\in\mathbb{R}$$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d'

On a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 \underline{\underline{=0}}$

Donc d et d' sont orthogonales.

Exercice 20

Dans chacun des cas suivants, étudier si les droites sont perpendiculaires.

1) $d:\begin{cases}x=3-2t\\y=-3+3t\\z=1-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=1+3s\\y=-3+2s\\z=-2\end{cases},s\in\mathbb{R}$

2) $d:\begin{cases}x=3-2t\\y=-3+3t\\z=1-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=8+3s\\y=-4+2s\\z=2\end{cases},s\in\mathbb{R}$

3) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=1-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ et la droite d' passant par le point $A(4;0;1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;-1;1)$.

1) <u>Orthogonales ?</u>

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d et

soit $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d'

On a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\cdot3+3\cdot2+0\cdot(-1)=0$

<u>Sécantes ?</u>

d et d' sont sécantes

$$\Leftrightarrow \exists (s;t) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} 3-2t = 1+3s & ① \\ -3+3t = -3+2s & ② \\ 1-t = -2 & ③ \end{cases}$$

③ $\Leftrightarrow t = 3$

Dans ① : $3 - 2\cdot 3 = 1 + 3\cdot s \Leftrightarrow 3s = -4$

$\Leftrightarrow s = \frac{-4}{3}$

Vérifions dans ② :

$$\left.\begin{array}{l} -3+3\cdot 3 = 6 \\ -3+2\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{17}{3} \end{array}\right) \neq$$

Donc d et d' ne sont pas sécantes et d $\not\perp$ d'

2) Orthogonales ?

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d et

soit $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d'

On a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\cdot 3 + 3\cdot 2 - 1\cdot 0 = 0$

Sécantes ?

d et d' sont sécantes

$$\Leftrightarrow \exists (s;t) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} 3-2t = 8+3s & ① \\ -3+3t = -4+2s & ② \\ 1-t = 2 & ③ \end{cases}$$

③ $\Leftrightarrow t = -1$

Dans ② : $-3-3 = -4+2s \Leftrightarrow s = -1$

Vérifions dans ① :

$$\left.\begin{array}{l} 3-2\cdot(-1) = 5 \\ 8+3\cdot(-1) = 5 \end{array}\right) =$$

Donc d et d' sont sécantes et d et d' sont $\perp$

3) Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur directeur de d et

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de d'

On a : $\vec{v}\cdot\vec{u} = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 - 1\cdot 1 = -2$

d et d' ne sont pas orthogonaux donc d et d' $\not\perp$.

Exercice 21

On donne les points $A(0;3;0)$, $B(-1;3;2)$ et $C(-2;-1;-4)$.

Est-ce que la droite *d* passant par *C* et de vecteur directeur $\vec{u}\left(-6;-\frac{15}{2};-3\right)$ est orthogonale à la droite *(AB)* ? Justifier.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-\frac{15}{2}\\-3\end{pmatrix}$

Orthogonales ?

On a :

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 6\cdot 1 - \frac{15}{2}\cdot 0 - 3\cdot 2 = 0$

Exercice 22

On donne les points $A(-4;3;0)$, $B(-3;1;1)$ et $C(1;-2;-3)$.

1) Vérifier que ces points ne sont pas alignés.
2) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-11;-8;-5)$ est un vecteur normal au plan *(ABC)*.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-5\\-3\end{pmatrix}$

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AB} = k\in\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 1 = k\cdot 5 & ① \\ -2 = k\cdot(-5) & ② \\ 1 = k\cdot(-3) & ③ \end{cases}$

$① \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$

Verifions dans ②: $\frac{1}{5}(-5) \neq -2$

Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaire et A, B et C ne sont pas alignés

2) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -11 \cdot 1 + (-8) \cdot (-2) - 5 \cdot 11 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -11 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 0$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal de (ABC).